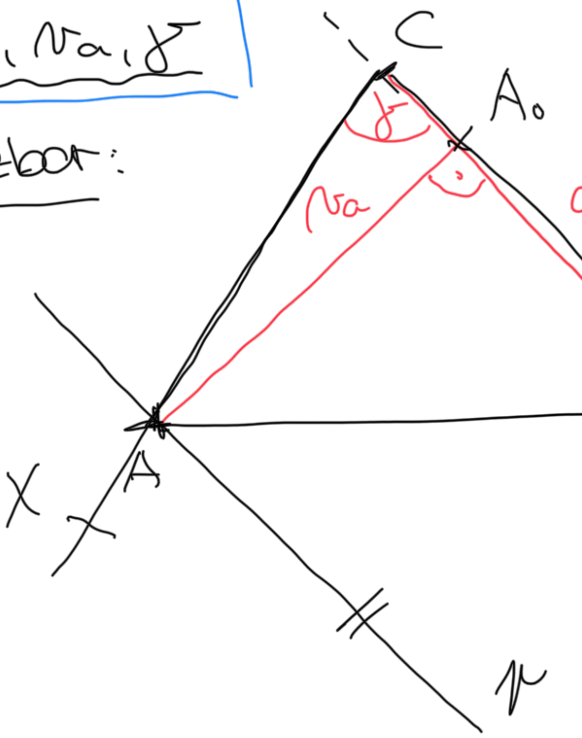
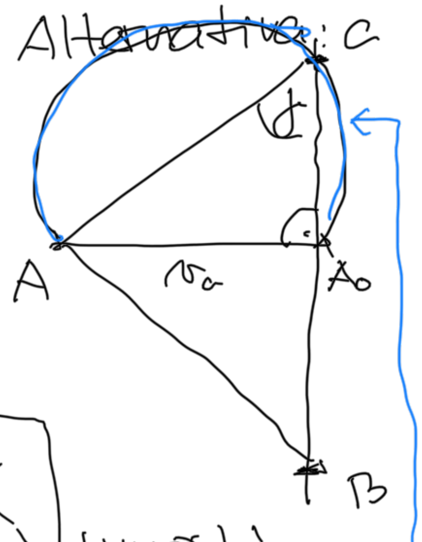
ÚKOL č. 6: Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno:

1) a, v_a, γ

Rozbor:



Alternativa:

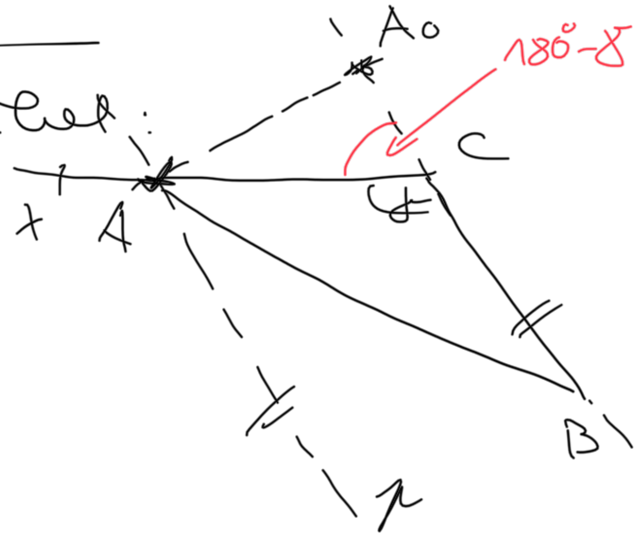


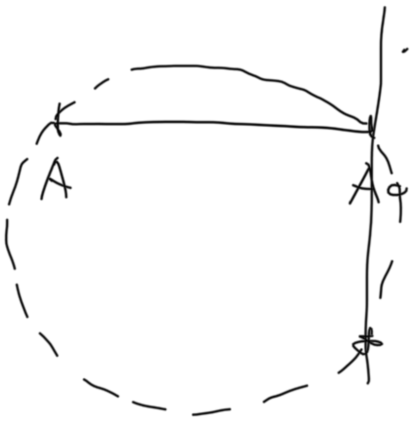
využití množiny bodů, z nichž vidíme úsečku AA_0 pod úhlem γ

Postup:

1) Úsečka BC délky a; $|BC| = a$.
2) Přímka p rovnoběžná s BC ve vzdál. v_a; $p \parallel BC$, $v(p, BC) = v_a$.
3) Úhel $\measuredangle BCX$; $|\measuredangle BCX| = \gamma$.
4) $A \in CX \cap p$.
5) $\triangle ABC$

γ je tupý úhel:

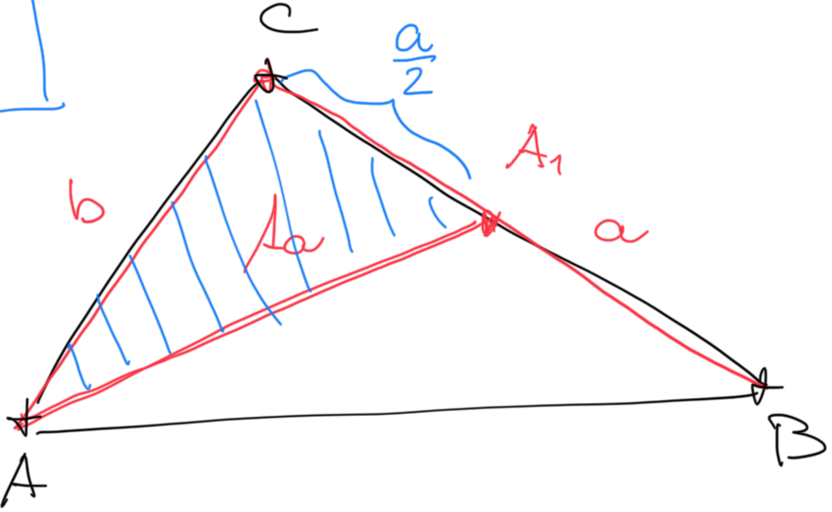




Diskuse: 1 řešení

$\boxed{2)\ a, b, t_a}$

Rozbor:



Postup:

1) Trojúhelník $\triangle AA_1C$;

$$\left.\begin{aligned} |AA_1| &= t_a, \\ |A_1C| &= \frac{a}{2}, \\ |AC| &= b. \end{aligned}\right\}$$ trojúhelníková nerovnost!

2) Prodloužíme stranu CA_1 na úsečku CB tak, že $|CB| = a$, A_1 je středem CB.

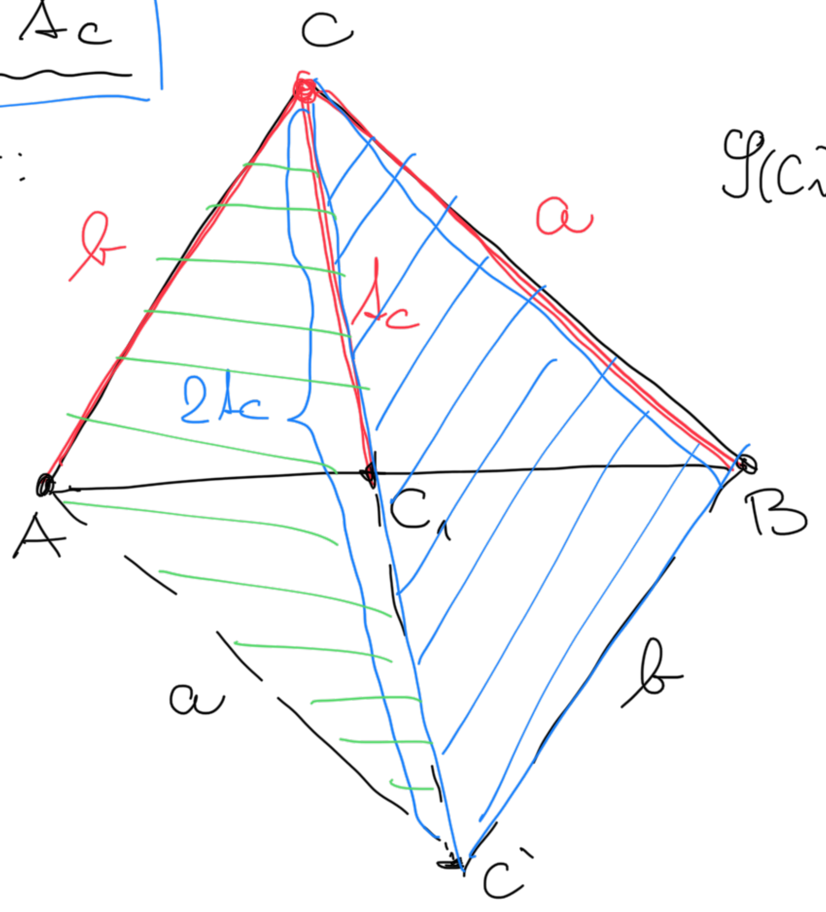
3) $\triangle ABC$

Diskuse: Délky t_a, $\frac{a}{2}$, b splňují trojúhelníkovou nerovnost. Potom má úloha 1 řešení.

---

3) a, b, t_c

Rozbor:



$S(C_1): A \to B$
$B \to A$
$C \to C'$

Postup:

1) Trojúhelník $\triangle CC'B$;

$$\left.\begin{array}{l} |CC'| = 2t_c, \\ |C'B| = b, \\ |BC| = a. \end{array}\right\} \text{Trojúhelníková nerovnost !}$$

2) C_1, střed strany CC'

3) Prodloužím úsečku BC_1 na úsečku BA tak, že C_1 je jejím středem

(Nebo: Sestrojím bod A jako obraz bodu B v $S(C_1)$.)

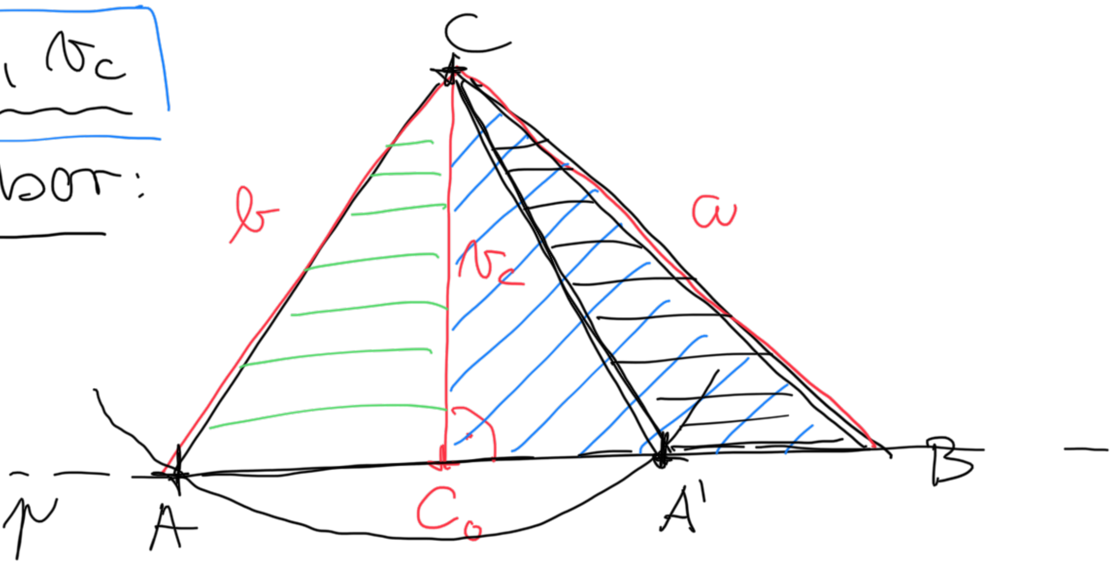
4) $\triangle ABC$

Diskuse: Délky $a, b, 2t_c$ splňují trojúhelníkovou nerovnost. Potom má úloha 1 řešení.

---

4) a, b, v_c

Rozbor:



1) Pravoúhlý trojúhelník $\triangle C_0BC$;

$|\sphericalangle BC_0C| = 90°$,

$|BC| = a$,

$|CC_0| = v_c$.

Vsuvka: Konstrukce $\triangle C_0BC$:

I) Přímka p a na ní bod C_0

II) Kolmice na p v C_0, na kterou naneseme v_c a tak dostaneme C.

III) Kružnice $k(C, a)$

IV) $B \in p \cap k$

2) kružnice $l(C, b)$.

3) $A \in l \cap \overleftrightarrow{C_0B}$.

4) $\triangle ABC$

$v_c < a$ $v_c > a$!

Diskuse:

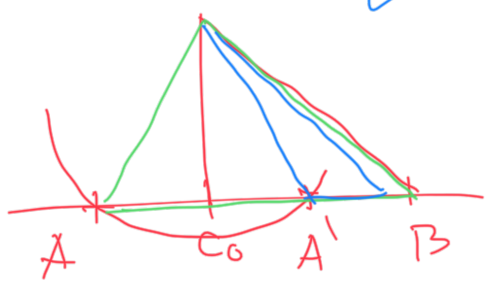
Aby měla úloha řešení musí určitě platit $v_c < a \wedge v_c < b$.

Může nastat i rovnost?

Pro $v_c = a$ a $v_c = b$ trojúhelník $\triangle ABC$ zdegeneruje do úsečky C_0C

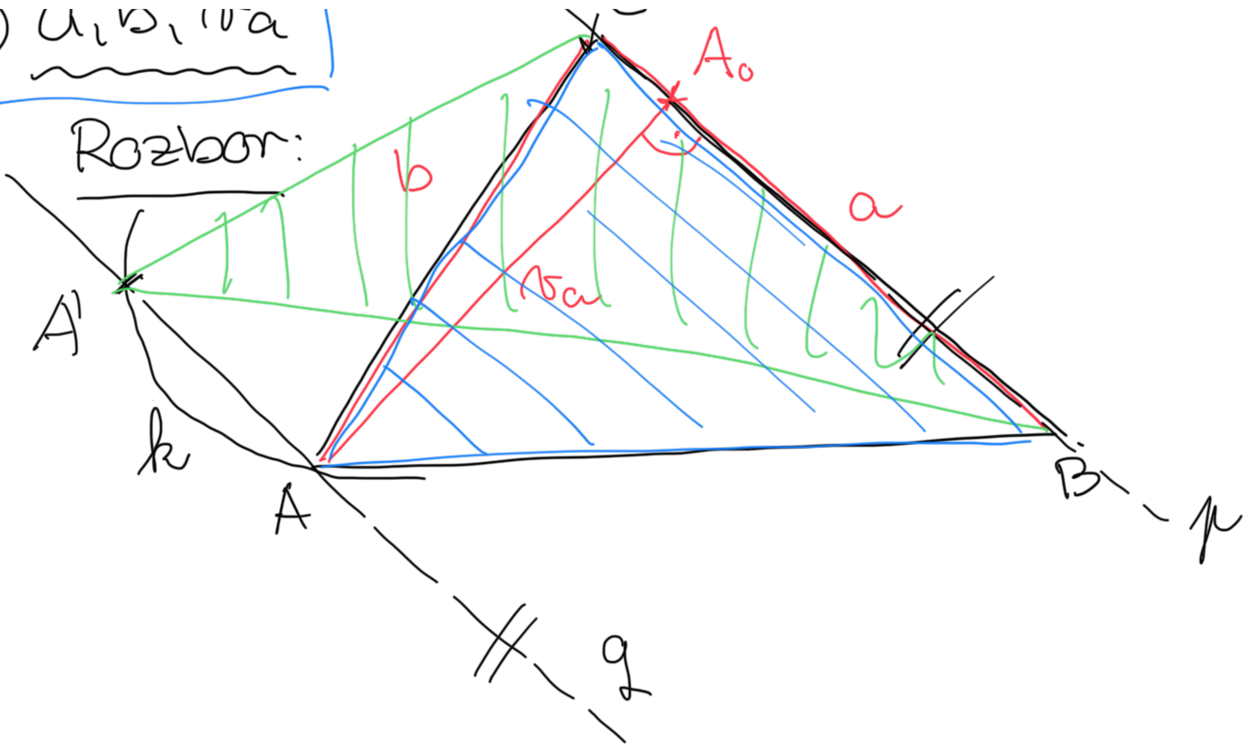
Pro $\left.\begin{array}{l} \boxed{v_c = a \text{ a } v_c < b} \\ \boxed{v_c < a \text{ a } v_c = b} \end{array}\right\}$ 1 řešení (pravoúhlý $\triangle$)

Pro $\boxed{v_c < a \text{ a } v_c < b}$ 2 řešení



5) a, b, v_a

Rozbor:



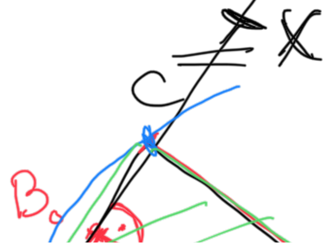
Postup:

1) úsečka BC; $|BC| = a$.
2) Přímka q rovnoběžná s BC ve vzdálenosti v_a; $q \parallel BC$, $v(q, BC) = v_a$.
3) Kružnice $k(C, b)$.
4) $A \in k \cap q$, $A' \in k \cap q$ (pro $b > v_a$)
5) $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$

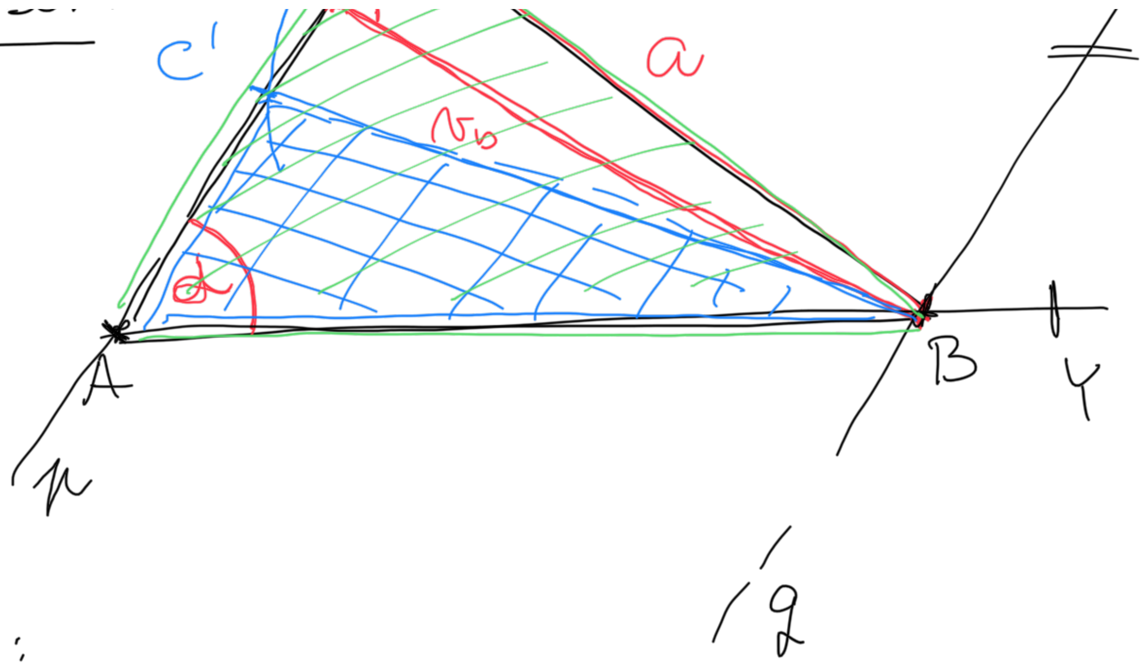
Diskuse: $b < v_a$ ... 0 řešení
$b = v_a$ ... 1 řešení
$b > v_a$ ... 2 řešení

---

6) a, α, v_b



Rozbor:

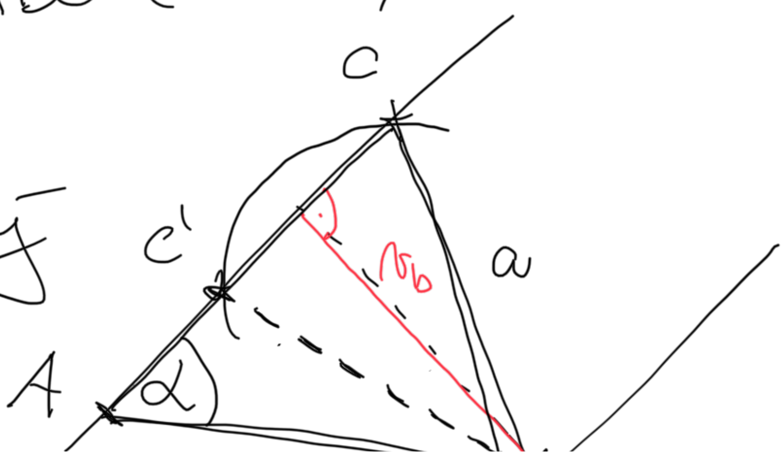


Postup:

1) Přímky p, q vzájemně rovnoběžné ve vzdálenosti v_b i $p \parallel q$, $v(p,q)=v_b$.
2) Úhel $\sphericalangle XAY$ velikosti α, kde body X a A leží na p i
   $|\sphericalangle XAY| = \alpha$, $X, A \in p$
3) $B \in \overrightarrow{AY} \cap q$
4) Kružnice $k(B, a)$
5) $C \in k \cap p$, $C' \in k \cap p$ (pro $a > v_b$)
6) $\triangle ABC$, $\triangle ABC'$ ($a > v_b$)

Diskuse:

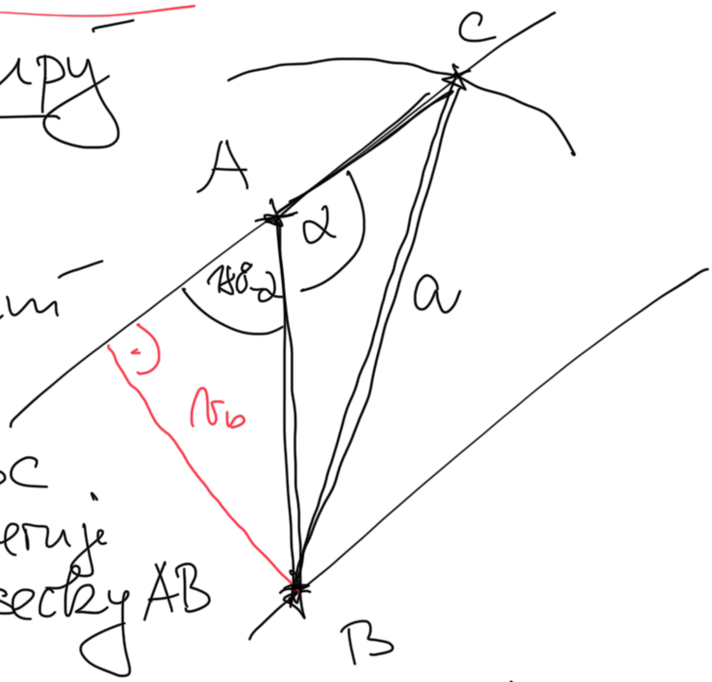
+ úhel α je ostrý



$\boxed{a = v_b \; \ldots \; 1 \text{ řešení}}$

$\boxed{a > v_b \; \ldots \; 2 \text{ řešení}}$

+ úhel α je tupý



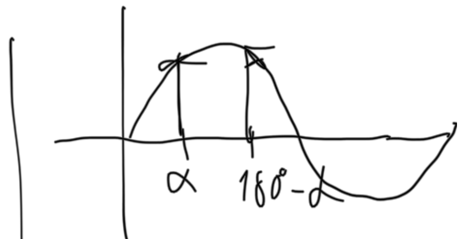
$a > |AB| \; \ldots \; 1 \text{ řešení}$

$a = |AB| \; \ldots \; \triangle ABC$ degeneruje do úsečky AB

$$|AB|: \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{v_b}{|AB|}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_b}{|AB|}$$

$$|AB| = \frac{v_b}{\sin\alpha}$$



$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$

$$a > |AB| \implies a > \frac{v_b}{\sin\alpha}$$

$$a \cdot \sin\alpha > v_b$$

Tuto část diskuse tak můžeme završit konstatováním, že pro tupý úhel α má úloha 1 řešení za podmínky, že $v_b < a \cdot \sin\alpha$, tj.:

$\forall b < a \cdot \sin\alpha$ ... 1 řešení